Criterios de divisibilidad

AlanLG

Marzo 2024

§1 Lectura

En esta lista trabajaremos propiedades elementales de teoría de números, la rama de las matemáticas que estudia el conjunto de los números enteros denotado por $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Así como el conjunto de los naturales denotado por $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

§1.1 Divisibilidad

Si a y b son dos número enteros ($a, b \in \mathbb{Z}$),decimos que a divide a b (ó bien $a \mid b$) si y solo si la división $\frac{a}{b}$ es entero, o bien

$$a \mid b \iff \frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$$

También podemos decir que a divide a b si existe un entero k tal que $b = a \cdot k$, o bien

$$a \mid b \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : b = a \cdot k$$

Cuando a **no divide** a b lo denotamos por $a \nmid b$

Ejemplo. $7 \mid 21$ pues $\frac{21}{7} = 3 \in \mathbb{Z}$

Ejemplo. $20 \mid 100$ pues $100 = 20 \cdot (50)$

Ejemplo. El 1 divide a todos los números (¿Por qué?)

§1.2 Números primos

Definición (Definición de número primo)

Decimos que un número entero positivo $p \neq \pm 1$ es primo si sus únicos divisores son ± 1 y $\pm p$

Definición. Decimos que un número entero positivo diferente de ± 1 es **Compuesto** si no es primo, a los número 1 y -1 se le llaman *unidades*

Ejemplo. El número 31 es primo

Ejemplo. El número 39 no es primo

Exercise. Encuentra los primeros diez números primos

Ejemplo. El único número primo que es par es el 2 (¿Por qué?)

§1.3 Criterios de divisibilidad

En la siguiente lista introduciremos los criterios de divisibilidad, que sirven esencialmente para ver si un número divide a otro, muchos de ellos son intuitivos pero saberlos te puede facilitar un poco de cuentas.

Criterio (Criterio de divisibilidad del 2)
Que su último dígito sea divisible entre 2

Ejemplo. $143\underline{4}$ es divisible entre 2 porque 4 es divisible entre 2

Criterio (Criterio de divisibilidad del 3)
Que la suma de sus dígitos sea divisible entre 3

Ejemplo. 2025 es divisible entre 3 porque $2 + 0 + 2 + 5 = 9$ es divisible entre 3

Ejemplo. 123456789 es divisible entre 3 porque $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ es divisible entre 3

Criterio (Criterio de divisibilidad del 4)
Que el número formado por sus últimos dos dígitos sea divisible entre 4

Ejemplo. $333\underline{12}$ es divisible entre 4 porque 12 es divisible entre 4

Ejemplo. $57\underline{04}$ es divisible entre 4 porque 4 es divisible entre 4

Criterio (Criterio de divisibilidad del 5)
Que su último dígita sea 0 ó 5

Ejemplo. $123\underline{0}$ es divisible entre 5 porque termina en 0

Ejemplo. $343\underline{5}$ es divisible entre porque termina en 5

Criterio (Criterio de divisibilidad del 6)
Que su último dígito sea par y la suma de sus dígitos sea divisible entre 3. Lo cúal es equivalente a que cumpla el criterio del 2 y del 3

Ejemplo. 12648 es divisible entre 6 porque termina en 8 y $1 + 2 + 6 + 4 + 8 = 21$ es divisible entre 3

Criterio (Criterio de divisibilidad del 8)
Que el número formado por sus últimos 3 dígitos sea divisible entre 8

Ejemplo. $45\underline{128}$ es divisible entre 8 porque 128 es divisible entre 8

Ejemplo. $123\underline{000}$ es divisible entre 8 porque 0 es divisible entre 8

Ejemplo. $2\overline{008}$ es divisible entre 8 porque 8 es divisible entre 8

Criterio (Criterio de divisibilidad del 9)
Que la suma de sus dígitos sea divisible entre 9

Ejemplo. 126 es divisible entre 9 porque $1 + 2 + 6 = 9$ es divisible entre 9

Ejemplo. 123456789 es divisible entre 9 porque $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ es divisible entre 9

Criterio (Criterio de divisibilidad del 10)
Que su último dígito sea 0

Ejemplo. $1000000\underline{0}$ es divisible entre 10 porque termina en 0

Ejemplo. $3435\underline{0}$ es divisible entre 10 porque termina en 0

Criterio (Criterio de divisibilidad del 11)
Que la suma de los dígitos en las posiciones pares menos la suma de los dígitos en las posiciones impares sea múltiplo de 11.

Ejemplo. 8192734 es divisible entre 11 porque $(8 + 9 + 7 + 4) - (1 + 2 + 3) = 22$ es divisible entre 11

Ejemplo. 132 es divisible entre 11 porque $(3) - (1 + 2) = 0$ es divisble entre 11

Ejemplo. 25366 es divisible entre 11 porque $(5+6)-(2+3+6) = 0$ es divisible entre 11

§2 Ejercicios

Ejercicio 2.1. Si un número es divisible por 2 y 6, ¿podemos garantizar que es divisible por $2 \times 6 = 12$

Ejercicio 2.2. Si un número es divisible por 3 y por 4, ¿podemos garantizar que es divisible por $3 \times 4 = 12$?

Ejercicio 2.3. Si un número es divisible por 4 y 6, ¿podemos garantizar que es divisible por $4 \times 6 = 12$

Ejercicio 2.4. La suma de dos números pares también es un número par

Ejemplo 2.5

Ejemplo 2.6

Si sabemos que solo uno de los números 234, 2345, 23456, 234567, 2345678, 23456789 es primo. ¿Cuál de ellos es?

*Solución.*Podemos ir descartando los números que no pueden ser primos, buscando algunos de sus divisores, primero descartemos los múltiplos de 2

$$\cancel{234}, \quad 2345, \quad \cancel{23456}, \quad 234567, \quad \cancel{2345678}, \quad 23456789$$

Luego los múltiplos de 5

$$\cancel{234}, \quad \cancel{2345}, \quad \cancel{23456}, \quad 234567, \quad \cancel{2345678}, \quad 23456789$$

Nota que $3 \mid 234567$ pues $3 \mid 2+3+4+5+6+7 = 27$, entonces tambien lo podemos descartar

$$\cancel{234}, \quad \cancel{2345}, \quad \cancel{23456}, \quad \cancel{234567}, \quad \cancel{2345678}, \quad \boxed{23456789}$$

De modo que el primo buscado es 23456789

Ejemplo 2.7

Encuentra el menor entero positivo a que cumple que $a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a$ es un número con todas sus cifras iguales

Solución. Sea N el número deseado; notemos que

$$N = a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a = 45a$$

Ahora nota que $5 \mid N$ y $9 \mid N$ (¿Por qué?) Como 5 divide a N, sabemos que N debe terminar en 0 o en 5, de modo que como, todas las cifras son iguales todos sus dígitos son 0 o 5, pero no pueden ser todos 0 (¿Por qué?). De modo que

$$N = \underbrace{55\cdots5}_{x \text{ cifras } 5\text{´s}}$$

Pero como $9 \mid N$ entonces la suma de dígitos de N es divisible entre 5, pero la suma de dígitos de N es $5x$ de modo que queremos hallar el menor $x \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $9 \mid 5x$, como 5 no tiene factores en común con 5 entonces $9 \mid x$ de modo que el menor x que cumple es 9 y entonces

$$N = \underbrace{555555555}_{9} = 45a \Rightarrow a = \frac{555555555}{45} = 123456789$$

§3 Problemas

Problema 3.1. h

§4 Hints

3.1. vs